Mesure d'une conductivité thermique.

Cet exercice est inspiré par un TP donné à l'oral des CCP et qui m'a été transmis par Riheb B.

Un cylindre métallique de rayon R, de hauteur H est chauffé par des résistances noyées en son sein. Une thermo-résistance, elle aussi noyée dans la masse, sert à en mesurer la température T_1 et à vérifier qu'elle a atteint une valeur stationnaire. On pose sur ce cylindre un disque d'un matériau très isolant, de même rayon et d'épaisseur e petite devant R, puis un disque métallique très conducteur de la chaleur de même rayon et de hauteur h petite devant R, pris à la température ambiante. Le tout est recouvert d'un matériau isolant épais. Dans ces hypothèses, la température du disque métallique peut être considérée comme uniforme à un instant donné, on la note $T(t)$ et on la mesure grâce à une seconde thermo-résistance incorporée dans le disque. On note T_0 la température stationnaire de la salle de TP

Question 1 :
Un relevé expérimental permet de vérifier que $T(t)$ varie selon une loi exponentielle de constante de temps τ. Montrer qu'on pourra en déduire la conductivité thermique de l'isolant. Quelle sont les grandeurs qu'il faudra mesurer et celles qu'il faudra trouver dans la littérature ?

Les échanges thermiques sont assez lents pour qu'on puisse considérer le régime comme quasi-permanent. La conductance thermique de l'isolant est $G = \lambda\, S/e$ où λ est sa conductivité et où $S = \pi\, R^2$. Le flux thermique à travers l'isolant est donc :

$$\mathcal{P}_{th} = G\,[T_1 - T(t)] = (\lambda\, S/e)\,[T_1 - T(t)]$$

Par ailleurs, appliquons la premier principe de la thermodynamique au disque métallique soit, puisque c'est un solide incompressible qui ne reçoit donc pas de travail

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = m\,c\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

où m, c sont la masse et la capacité calorifique du disque, donc

$$m\,c\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = (\lambda\, S/e)\,[T_1 - T(t)]$$

soit encore

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_1 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{m\,c\,e}{\lambda\, S}$$

dont la solution est, avec $T(0) = T_0$

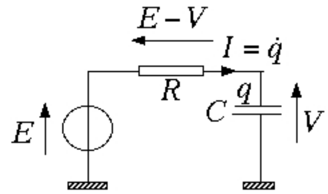
$$T(t) = T_1 - (T_1 - T_0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Le relevé expérimental de $T(t)$ permet aisément de mesurer τ, il est aisé au laboratoire de mesurer e, S et m ; la valeur de c pourra être trouvée dans un «handbook» ou à défaut par une expérience annexe de calorimétrie (méthode des mélanges, par exemple). Ainsi, on trouvera la conductivité λ de l'isolant.

Question 2 :
Proposer un circuit électrique qui se comporte de la même façon.

Si l'on formule ce qui précède par $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = G\,[T_1 - T(t)]$, on pense à $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = G(V_A - V_B)$; ensuite $U = m\,c\,T$ fait penser à $q = C\,V_B$, soit en allégeant la notation et en introduisant un générateur de tension de f.e.m. notée E plutôt que V_1

$$C\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{E - V}{R}$$

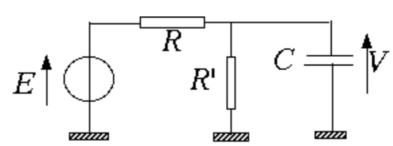


On aboutit alors à la figure ci-dessus et à la solution suivante : $V(t) = E - E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R\,C$. Pour une meilleure adaptation des deux problèmes, la masse est l'équivalent du milieu ambiant donc E est l'équivalent non pas de T_1 mais de $T_1 - T_0$ et V de $T - T_0$; les équivalences sont

$$
\begin{array}{rcll}
T_1 - T_0 & \longleftrightarrow & E & \\
T - T_0 & \longleftrightarrow & V & \\
m\,c & \longleftrightarrow & C & \\
U & \longleftrightarrow & q & \text{avec la convention } U(T_0) = 0 \\
R_{th} = \dfrac{e}{\lambda\,S} & \longleftrightarrow & R & \\
\mathcal{P}_{th} & \longleftrightarrow & I = \dot{q} &
\end{array}
$$

Question 3 :
En fait la valeur limite de $T(t)$ n'est pas T_1 ; on la note T_∞ . Pourquoi ? Comment faut-il modifier le raisonnement précédent, le circuit équivalent ?

L'isolant épais qui isole l'expérience du milieu extérieur n'est pas parfait et il y a des fuites thermiques de puissance $\mathcal{P}'_{th} = G\,[T(t) - T_0]$; dans le circuit électrique équivalent, cela revient à placer une résistance R' en parallèle avec le condensateur.



Plutôt que de raisonner directement sur la thermodynamique du problème, appuyons nous au maximum sur l'équivalence électrique et mieux encore profitons-en pour réviser notre théorème de Thevenin. Le générateur de f.e.m. E en série avec R et R' et débitant dans la capacité par les bornes de R' est équivalent à un générateur de f.e.m. E_{Th} et de résistance R_{Th} débitant directement dans C, ce qui nous ramène à la première figure en y remplaçant E et R par E_{Th} et R_{Th}.

R_{Th} est, d'après le cours, la résistance équivalente à R et R' en parallèle soit

$$R_{Th} = \frac{R\,R'}{R + R'}$$

Et E_{Th} est la d.d.p. aux bornes de R' lorsqu'on débranche le circuit d'utilisation (ici C) ; comme on reconnaît un diviseur de tension, on a :

$$E_{Th} = E\,\frac{R'}{R + R'}$$

En raisonnant sur la première figure, on conçoit aisément que lorsque la charge est terminée, la tension est $V_\infty = E_{th}$, d'où, avec les équivalences précisées ci-dessus :

$$T_\infty - T_0 = (T_1 - T_0)\,\frac{R'}{R + R'}$$

d'où

$$\frac{R+R'}{R'} = \frac{T_1 - T_0}{T_\infty - T_0}$$

ce qui nous servira un tout petit peu plus loin.

D'autre part la constante de temps n'est plus $\tau = C\,R$ mais $\tau' = C\,R_{Th}$. L'expérience donne accès à τ' et pour calculer la conductivité de l'isolant, il suffit de connaître τ ; il faut donc de tirer τ de τ'. Allons-y :

$$\tau' = C\,R_{Th} = C\,\frac{R\,R'}{R+R'}$$

d'où

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{C}\,\frac{R+R'}{R\,R'} = \frac{1}{C\,R}\,\frac{R+R'}{R'} = \frac{1}{\tau}\,\frac{R+R'}{R'} = \frac{1}{\tau}\,\frac{T_1 - T_0}{T_\infty - T_0}$$

et finalement

$$\tau = \tau'\,\frac{T_1 - T_0}{T_\infty - T_0}$$